Применение пакетов аналитических вычислений к изучению тензоров Риччи инвариантных связностей

Н. П. Можей, e-mail: mozheynatalya@mail.ru[1]

[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Работа посвящена применению пакетов аналитических вычислений к изучению тензоров Риччи инвариантных связностей. Наиболее эффективное решение этой задачи возможно в системе Maple. Находятся и выписываются в явном виде тензоры Риччи инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах.*

Ключевые слова: *компьютерная математика, тензор Риччи, однородное пространство, группа преобразований, аффинная связность.*

Введение

Современное программное обеспечение для использования в математических вычислениях представляет собой более или менее полную систему, включающую метод представления нечисловых данных, язык, позволяющий ими манипулировать, и библиотеку функций для выполнения базисных алгебраических операций. Все чаще системы символьной математики используются для решения задач аналитической и дифференциальной геометрии.

Гладкое многообразие обобщает кривые и поверхности трехмерного евклидова пространства, рассматриваемые локально в классической дифференциальной геометрии и глобально в аналитической геометрии. Тензор Риччи задаёт один из способов измерения кривизны многообразия (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского пространства). Данная работа посвящена изучению тензоров Риччи инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах с помощью пакетов аналитических вычислений, она является продолжением исследований в области дифференциальной геометрии с использованием новейших разработок компьютерной алгебры. Целью работы является создание алгоритмов и программ в среде пакета Maple для исследования тензоров Риччи инвариантных аффинных связностей на однородных пространствах. Исследование проводится следующим образом: строится удобная для вычислительной работы модель объекта, создается программа для реализации в системе аналитических расчетов Maple, проводятся вычисления, анализ и истолкование полученных результатов, изучаются возможности уточнения модели.

Основная часть

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности – представление изотропии для G должно быть точным, если $\overline{G}$ эффективна на $\overline{G}/G$. Пусть $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, . что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным [1]. Тензор кручения $T \in InvT_2^{\ 1}(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in InvT_3^{\ 1}(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x) y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y) x_{\mathfrak{m}} - \; x, y \; _{\mathfrak{m}},$$

$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \; \Lambda(x), \Lambda(y) \; - \Lambda(\; x, y \;).$$

а тензор Риччи имеет вид

$$Ric(y_{\mathfrak{m}}, z_{\mathfrak{m}}) = tr\{x_{\mathfrak{m}} \mapsto R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) z_{\mathfrak{m}}\}$$

для всех $x, y, z \in \overline{\mathfrak{g}}$.

Для изучения тензоров Риччи инвариантных связностей сначала получена локальная классификация трехмерных изотропно-точных однородных пространств как пар алгебр Ли, т.е. классифицированы (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$ –модули U (это эквивалентно классификации подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$ –модули $\overline{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Для нахождения аффинных связностей, тензоров кривизны, кручения и тензоров Риччи для каждой пары алгебр Ли используем пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor и другие.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\dots,e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\dots,e_{n-3}$. Пусть

$$\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}\ -$$

базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, соответствующие приведенным, например, в [2]. Поскольку ограничение

$$\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$$

на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры ($\Lambda|_{\mathfrak{g}}=\lambda$), связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$, будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R будем описывать его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, задаем ее структурные константы и используем команду DGsetup для инициализации алгебры. После инициализации можно проводить все виды вычислений и проверок. Для каждой построенной пары алгебр Ли находим инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, тензоры Риччи, используя команды пакета Maple.

Например, в случаях 4.21.24 и 4.21.25 пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ имеет вид

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

$\alpha<-1/4$, $\delta=0, 1$, тогда аффинная связность –

$$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r_{1,1}&-q_{1,3}&0\\0&r_{1,1}+1&0\\0&0&r_{1,1}+p_{1,3}+1\end{pmatrix}.$$

В случае 4.21.24 тензор кривизны принимает вид (здесь и далее $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j} \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \geq -1/4$ уравнение ${p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha = 0$ имеет решение, т.е. если $p_{1,3}$ – корень этого уравнения, а $q_{1,3} = 0$, то тензор кривизны нулевой. Если $\alpha < -1/4$, то при любых значениях параметров $p_{1,3}$, $q_{1,3} \in \mathbb{R}$ тензор кривизны не может оказаться нулевым. Тогда тензор Риччи $Ric(y,z)=tr\{x \mapsto R(x,y)z\}$ –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2 - 2\alpha + 2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в случае 4.21.25 тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} - 1 \\ 0 & 0 & {p_{1,3}}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор ненулевой при $\alpha < -1/4$, а тензор Риччи совпадает с выписанным в случае 4.21.24. Тензор кручения в случаях 4.21.24, 4.21.25 –

$$(0,0,0),\ \ p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0\ \ ,\ \ 2q_{1,3}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0\ \ .$$

Соответственно, $T = 0$ при $r_{1,1} = p_{1,3}$, $q_{1,3} = 0$.

Заключение

Разработаны алгоритмы и программы в системе аналитических вычислений для нахождения тензоров Риччи инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах. С их помощью получены новые результаты в теории инвариантных связностей на многообразиях, а именно, найдены и выписаны в явном виде тензоры Риччи инвариантных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах. Методика исследований ориентирована на использование методов компьютерной алгебры, теории групп и алгебр

Ли, а также теории однородных пространств. Построенные компьютерные модели позволяют вычислять компоненты связности, тензоров кривизны и кручения, тензоров Риччи на однородных пространствах и могут быть применены для больших размерностей.

Литература

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. 1954. – V. 76, № 1. – C. 33–65.
2. Можей, Н. П. Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах / Н. П. Можей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 381–393.